1	2	3	4
B	R	B|R	B-

CALIF.
9

Algebra I

Examen Final (10/12/2021)

1. Sea $V = \{1, 2, \ldots, 499, 500\}$. Se define en $\mathcal{P}(V) \setminus \emptyset$ la relación $\mathcal{R}$:

$$A \mathcal{R} B \iff \min(A) = \min(B) \text{ y } \max(A) = \max(B),$$

(donde si X es un subconjunto no vacío de V, $\min(X)$ denota el menor elemento de X y $\max(X)$ denota el mayor elemento de X. Por ejemplo para $X = \{2, 5, 8\}$, $\min(X) = 2$ y $\max(X) = 8$ mientras que para $X = \{5\}$, $\min(X) = \max(X) = 5$).

(a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{P}(V) \setminus \emptyset$ y calcular el cardinal de las clases de $X = \{1, 100\}$ y de $Y = \{50\}$.

(b) ¿Cuántas clases de equivalencia tiene la relación $\mathcal{R}$?

---

2. Determinar los posibles restos al dividir por 252 de todos los $a \in \mathbb{Z}$ que satisfacen que

$$(a^{225} + 10a + 1 : 252) = 14.$$

---

3. (a) Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales

$$X^2 + X + 1 \mid X^{2n} + X^n + 1.$$

(b) Calcular el resto de dividir a $X^{6n} + X^{3n} + 1$ por $X^2 + X + 1$.

---

4. Sea $f \in \mathbb{C}[X]$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de f de multiplicidad exactamente 5. Definimos la sucesión de polinomios $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como

$$f_1 := f \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X - \alpha)^2 f_n + f^{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Encontrar y probar una fórmula para la multiplicidad exacta de α como raíz de f_n.

(Enunciar cuidadosamente todas las propiedades vistas en la teórica utilizadas.)

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

Hope William — SERVICIOS DE SALUD | NOW — William Hope

① Álgebra I
Final 10/12/2021

Ejercicio 1

$V = \{1, 2, \ldots, 499, 500\}$. Se define la relación R en $P(V) \setminus \emptyset$ como: $ARB \iff min(A) = min(B)$ y $max(A) = max(B)$

a) Probar que R es una relación de equivalencia

R es una relación de equivalencia $\iff$ ~~...~~ R es reflexiva $\wedge$ R es simétrica $\wedge$ R es transitiva

• $\boxed{R}$. R es reflexiva $\iff$ Dado $A \in P(V) \setminus \emptyset$, ARA

Por definición, $ARA \iff min(A) = min(A)$ y $max(A) = max(A)$

Luego R es reflexiva dado que $min(A) = min(A)$ y $max(A) = max(A)$, $\forall A \in P(V) \setminus \emptyset$

• $\boxed{S}$. R es simétrica $\iff$ Dados $A, B \in P(V) \setminus \emptyset$, $ARB \Rightarrow BRA$

Por definición, $ARB \iff min(A) = min(B)$ y $max(A) = max(B)$

Por lo tanto, sabiendo que ARB, se sabe que
$min(A) = min(B) \iff min(B) = min(A)$
$max(A) = max(B) \iff$ ~~...~~ $\iff max(B) = max(A)$

Y por lo tanto $max(B) = max(A)$ y $min(B) = min(A) \iff BRA$ como se quería probar.
Luego R es una relación simétrica

• $\boxed{T}$: $\mathcal{R}$ es transitiva $\iff$ Dados $A, B, C \in P(V)\setminus\emptyset$,
$A\mathcal{R}B \wedge B\mathcal{R}C \Rightarrow A\mathcal{R}C$

Por definición, $A\mathcal{R}B \iff \min(A)=\min(B)$ y $\max(A)=\max(B)$
$B\mathcal{R}C \iff \min(B)=\min(C)$ y $\max(B)=\max(C)$

Dado que $\min(A)=\min(B)$ y $\min(B)=\min(C)$
$\Rightarrow \min(A)=\min(C)$

Y también dado que $\max(A)=\max(B)$ y $\max(B)=\max(C)$
$\Rightarrow \max(A)=\max(C)$

Luego $\min(A)=\min(C) \wedge \max(A)=\max(C) \iff A\mathcal{R}C$, como se quería probar, luego $\mathcal{R}$ es una relación transitiva.

$\therefore$ Por lo tanto $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia dado que es una relación reflexiva, simétrica y transitiva ✓

a) Calcular el cardinal de la clase de $X=\{1,100\}$

Busco todos los $B \in P(V)\setminus\emptyset$ tales que $X\mathcal{R}B$
Por definición, $X\mathcal{R}B \iff \min(X)=\min(B)$ y $\max(X)=\max(B)$
$\iff 1 = \min(B)$ y $100 = \max(B)$

Por ende busco todos los $B \in P(V)\setminus\emptyset$ tales que $\min(B)=1$ y $\max(B)=100$

Sabiendo que $V=\{1,2,\dots,499,500\}$ Tengo que contar todos los subconjuntos de V que poseen al 1, poseen al 100 y no poseen ningún $a \in V \mid a>100$

Así, $1 \rightarrow 1$ posibilidad $\rightarrow 1$ — 101 al 500 $\rightarrow 1$ posibilidad
2 al 99 $\rightarrow 2$ posibilidades $\rightarrow 2^{98}$
$100 \rightarrow 1$ posibilidad $\rightarrow 1$

Hope

NOW William Hope

2

Por lo tanto tendré $1.2^{98}.1.1 = 2^{98}$ conjuntos $\in \overline{X}$

$\therefore \Rightarrow \#\overline{X} = 2^{98}$ ✓

a'') Calcular el cardinal de la clase de $Y = \{50\}$

Busco todos los $C \in P(V) \setminus \emptyset$ tales que YRC

por definición, $YRC \Leftrightarrow$ ~~...~~

$\min(Y) = \min(C)$ y $\max(Y) = \max(C)$

$\Leftrightarrow 50 = \min(C)$ y $50 = \max(C)$

Por ende, busco todos los $C \in P(V) \setminus \emptyset$ tales que $\min(C) = 50$ y $\max(C) = 50$

Pero el único conjunto que cumple ambos en simultáneo es $C = \{50\}$ y por lo tanto

$\#\{50\} = 1$ ✓

b) ¿Cuántas clases de equivalencia tiene la relación R?

Para saber si un subconjunto de V pertenece a una clase de equivalencia, alcanza con observar el mínimo y el máximo del subconjunto.

Separo en dos casos, clases del $\{n\}$ con $n \in V$ forman 500 clases distintas y no se relacionan con subconjuntos de dos o más elementos.

Clase del tipo $\{a_1, \ldots, a_r\}$ con ~~0~~ $2 \leq r \leq 500$, $a_i \in V$

En este caso voy a tener ~~...~~ $500 - a_1$ clases

Ej $a_1 = 1 \Rightarrow \{1,500\}, \{1,499\}, \{1,498\} \ldots \Rightarrow$ ~~...~~ 499 clases

$a_1 = 2 \Rightarrow \{2,500\}, \{2,499\}, \ldots \Rightarrow 498$ clases

$a_1 = 499 \Rightarrow \{499,500\} \Rightarrow 1$ clase

Hope

NOW William Hope

Luego, habrá $500 + \sum_{i=1}^{499} i = 500 + \frac{(499).500}{2} = 125250$ clases ✓

3

Ejercicio 2

$(a^{225}+10a+1 : 252) = 14$ Busco $r_{252}(a)$

Se que $252 = 2^2 . 3^2 . 7$ y $14 = 2.7$

Dado que $(a^{225}+10a+1 : 252) = 14 \Rightarrow$ $2 \mid a^{225}+10a+1$

$4 \nmid a^{225}+10a+1$

$7 \mid a^{225}+10a+1$

$3 \nmid a^{225}+10a+1$

- Luego $2 \mid a^{225}+10a+1 \Leftrightarrow a \equiv 1(2)$

pues si $a \equiv 0(2) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 0+0+1 \not\equiv 0(2)$

$a \equiv 1(2) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 1+0+1 \equiv 0(2)$

$a \equiv 1(2) \Leftrightarrow a \equiv 1(4)$ ó $a \equiv 3(4)$

Si $a \equiv 1(4) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 1+10+1 \equiv 0(4)$ NO SIRVE

Si $a \equiv 3(4) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 3^{225}+10.3+1 \equiv (3^2)^{112}.3+2+1$

$\equiv 1^{112}.3+3 \equiv 6 \equiv 2(4)$

$\Rightarrow a \equiv 3(4)$ sirve.

- $7 \mid a^{225}+10a+1 \Leftrightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 0(7)$

Separo en dos casos: $7 \mid a$ y $7 \nmid a$

- $7 \mid a \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 0+0+1 \not\equiv 0\ (7) \Rightarrow a \equiv 0(7)$ No sirve
- $7 \nmid a \Rightarrow a^{225}+10a+1 \underset{PTF}{\equiv} (a^6)^{37}.a^3+10a+1 \equiv a^3+3a+1$

PTF: $a, p \in \mathbb{Z}$, p primo, $a \perp p$: $a^{p-1} \equiv 1(p)$

Luego busco $a /\ a^3+3a+1 \equiv 0(7)$

Tablo de restos mod 7

$a \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	mod 7
$a^3 \equiv$	0	1	1	6	1	6	6	
$3a \equiv$	0	3	6	2	5	1	4	
$a^3+3a+1 \equiv$	1	5	~~8~~ 1	2	0	1	4	

Por tabla veo que $a^3+3a+1 \equiv 0\ (7) \Leftrightarrow a \equiv 4\ (7)$ ✓

• Busco congruencia de a módulo 3

$3 \nmid a^{225}+10a+1 \Leftrightarrow a^{225}+10a+1 \not\equiv 0\ (3)$

Separo en dos casos: $3|a$ y $3 \nmid a$

• $3|a \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 0+0+1 \not\equiv 0\ (3)$ luego $a \equiv 0\ (3)$

• $3 \nmid a \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv \underbrace{(a^2)^{112}}_{PTF}.a + a+1 \equiv 2a+1\ (3)$ sirve

  • Si $a \equiv 1\ (3) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 2a+1 \equiv 0\ (3)$ $a \equiv 1\ (3)$ NO sirve
  • Si $a \equiv 2\ (3) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 2a+1 \equiv 5\ (3)$ $a \equiv 2\ (3)$ sirve

luego $a \equiv 2\ (3)$, $a \equiv 0\ (3)$ sirven

$a \equiv 2\ (3) \Rightarrow a \equiv 2\ (9)$ ó $a \equiv 5\ (9)$ ó $a \equiv 8\ (9)$ ✓

$a \equiv 0\ (3) \Rightarrow a \equiv 0\ (9)$ ✗

NO $a \equiv 0\ (3) \Rightarrow a \equiv 0$ ó 3 ó $6\ (9)$

INUTIL

Pruebo cuáles cumplen $9 \nmid a^{225}+10a+1$

Si $3 \nmid N$, ent $9 \nmid N$

• $a \equiv 0\ (9) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 1\ (9)$ ✓

• $a \equiv 2\ (9) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 2^{225}+20+1 \equiv (2^3)^{75}+3 \equiv (-1)^{75}+3 \equiv 2\ (9)$ ✓

• $a \equiv 5\ (9) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 5^{225}+50+1 \equiv (5^3)^{75}+51 \equiv (-1)^{75}+6 \equiv 5\ (9)$ ✓

• $a \equiv 8\ (9) \Rightarrow a^{225}+10a+1 \equiv 8^{225}+80+1 \equiv (8^3)^{75}+81 \equiv (-1)^{75}+0 \equiv 8\ (9)$ ✓

(4)

Faltan $a \equiv 6(9)$ y $a \equiv 3(9)$

Por lo tanto $(a^{225}+10a+1 : 252) = 14 \Leftrightarrow$
$a \equiv 3(4)$
$a \equiv 4(7)$
$a \equiv 0(9)$ ó $a \equiv 2(9)$
ó $a \equiv 5(9)$ ó $a \equiv 8(9)$

No? $a \equiv 0(3) \Rightarrow a \equiv 0$ ó 3 ó $6\,(9)$
$a \equiv 2(3) \Rightarrow a \equiv 2$ ó 5 ó $8\,(9)$

• $a \equiv 0(9) \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 3(4) \\ a \equiv 4(7) \\ a \equiv 0(9) \end{cases}$ Por Teorema chino del resto existe una única solución módulo 252 $X = X_0 + X_1 + X_2$

S_0 $a \equiv 3(4)$
$a \equiv 0(63) \Rightarrow a = 63k$ $\Rightarrow 63k \equiv 3(4) \Leftrightarrow -k \equiv 3(4) \Leftrightarrow k \equiv 1(4)$
$\Rightarrow k_0 = 1$ es solución particular

Luego $X_0 = 63 \cdot 1 = 63$

S_1 $a \equiv 4(7)$
$a \equiv 0(36) \Rightarrow a = 36k$ $\Rightarrow 36k \equiv 4(7) \Leftrightarrow k \equiv 4(7)$
$k_1 = 4$ es solución particular

Luego $X_1 = 36 \cdot 4 = 144$

S_2 $a \equiv 0(9)$
$a \equiv 0(28)$ $\Rightarrow a \equiv 0(252)$

$X_2 = \cancel{252}\ 0$

Luego $a \equiv 0(9) \Rightarrow r_{252}(a) = 63 + 144 = 207$

• $a \equiv 2(9) \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 3(4) \\ a \equiv 4(7) \\ a \equiv 2(9) \end{cases}$

~~Luego~~ Dado que $a \equiv 3(4)$ y $a \equiv 4(7)$ no cambiaron en relación al ~~?~~ inciso anterior, $X_0 = 63$ y $X_1 = 144$

(S_2) $a \equiv 2(9)$ $\qquad \Rightarrow 28k \equiv 2(9) \Leftrightarrow k \equiv 2(9)$

$a \equiv 0(28) \Rightarrow a = 28k$ $\qquad k_2 = 2$ es solución particular

$\Rightarrow x_2 = 28.2 = 56$

Luego $x = x_0 + x_1 + x_2 = 63 + 144 + 56 = 263 \equiv 11\,(252)$

• $a \equiv 5(9)$

$\Rightarrow \begin{cases} a \equiv 3(4) \\ a \equiv 4(7) \\ a \equiv 5(9) \end{cases}$ $\qquad x = 63 + 144 + x_2$ con x_2 solución particular de S_2

(S_2) $a \equiv 5(9)$ $\qquad \Rightarrow 28k \equiv 5(9) \Leftrightarrow k \equiv 5(9)$

$a \equiv 0(28) \Rightarrow a = 28k$ $\qquad k = 5$

$x_2 = 28.k = 28.5 = 140$

$\Rightarrow x = 63 + 144 + 140 = 347 \equiv 95\,(252)$

• $a \equiv 8(9) \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 3(4) \\ a \equiv 4(7) \\ a \equiv 8(9) \end{cases}$ $\qquad x = 63 + 144 + x_2$ con x_2 solución del sistema S_2

(S_2) $\begin{cases} a \equiv 8(9) \\ a \equiv 0(28 \Rightarrow a = 28k \end{cases}$ $\qquad \Rightarrow 28k \equiv 8(9) \Leftrightarrow k \equiv 8(9)$

$k = 8$ es solución

$\Rightarrow x_2 = 28.8 = 224$

Por lo tanto los posibles restos de dividir a $a \in \mathbb{Z}$ por 252 son 207, 11, 95 y 224

⊠

Hiciste algo superfluo y conceptualmente mal: $\qquad$ Reg

$9|N \Rightarrow 3|N$ por lo tanto $3 \nmid N \Rightarrow 9 \nmid N$, $a \equiv 0(3) \not\Rightarrow a \equiv 0(9)$

Hope

NOW by William Hope

5

Ejercicio 3

a) Defino $f = X^2+X+1$ y $g = X^{2n}+X^n+1$

Se que $f = \left(X-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\cdot\left(X-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$ con

$w_1 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ en $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ raices cubicas de la unidad

Por propiedades de las raices de la unidad, se que sea G_n ~~&~~ $w \in G_n \Rightarrow w^k = w^{r_n(k)}$

y se que sea $w \in G_3$, $w^1+w^2+1=0$ solo si $w \neq 1$

Por lo tanto $f | g \Leftrightarrow g(w_1)=0 \Leftrightarrow g(w_2)=0$

~~Pero $g(w_1)=0 \Leftrightarrow n \equiv 1(3)$~~

Si $n \equiv 0(3) \Rightarrow g(w_1) = w_1^0 + w_1^0 + 1 \neq 0$

Si $n \equiv 1(3) \Rightarrow g(w_1) = w_1^2 + w + 1 = 0$ ✓

Si $n \equiv 2(3) \Rightarrow g(w_1) = w_1^1 + w^2 + 1 = 0$ ✓

Luego $f | g \Leftrightarrow n \equiv 1(3)$ o $n \equiv 2(3)$ B⁻

b) Por teorema del resto NO ? se que $h = X^{6n}+X^{3n}+1 = f\cdot q + r$

$\Leftrightarrow h(w_1) = f(w_1)\cdot q + r(w_1)$

$h(w_1) = r(w_1) = w_1^{6n} + X^{3n} + 1$

No ? r tiene grado 1 no queda determinado por $h(w_1)$ sino por $h(w_1)$ y $h(w_2)$

• $n \equiv 0(3) \Rightarrow w_1^0 + w_1^0 + 1 = 3$

~~$n \equiv 1(3) \Rightarrow \dots$~~

• $n \equiv 1(3) \Rightarrow w_1^6 + w_1^3 + 1 = 3$

• $n \equiv 2(3) \Rightarrow w_1^{12} + w_1^9 + 1 = 3$

Reg

$r(w_1) = 3$ pero falta $r(w_2)$?

Scanned with CamScanner

∴ Luego, el resto de dividir a $x^{6n}+3^n+1$ por x^2+x+1 es igual a 3

Hope
NOW William Hope

6

Ejercicio 4

$f_1 = f \quad f_{n+1} = (X-\alpha)^2 f_n + f^{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\alpha \in \mathbb{C}$ es una raíz con $mult(\alpha, f) = 5 \Leftrightarrow f = (x-\alpha)^5 \cdot q$ con $q(\alpha) \neq 0$

$n=1 \Rightarrow mult(\alpha, f_1) = 5$

$n=2 \Rightarrow mult(\alpha, f_2) = 7 \qquad (x-\alpha)^2 \cdot (x-\alpha)^5 q + [(x-\alpha)^5 \cdot q]^2$

$n=3 \Rightarrow mult(\alpha, f_3) = 9 \qquad (x-\alpha)^2 \cdot (x-\alpha)^7 \cdot q_2 + (x-\alpha)^{15} q^3$

$n=4 \Rightarrow mult(\alpha, f_4) = 11 \qquad (x-\alpha)^2 \cdot (x-\alpha)^9 q_3 + (x-\alpha)^{20} \cdot q^4$

$n=5 \Rightarrow mult(\alpha, f_5) = 13 \qquad (x-\alpha)^2 \cdot (x-\alpha)^{11} \cdot q_4 + (x-\alpha)^{25} q$

$\cancel{2x3}$ $c \cdot n \cdot 2+1$? $\rightarrow n=2 \Rightarrow m_n = 5$

$3 \Rightarrow m_n = 7$

$(n+1) \cdot 2+1 \Rightarrow n=1 \Rightarrow m_1 = 5$

$n=2 \quad m_2 = 7$

Parece que la multiplicidad de α como raíz de f_n es de la forma $(n+1) \cdot 2 + 1 = 2n+3$

Sin embargo para poder asumir que estas multiplicidades son correctas hay que verificar que $2n+3 \leq 5n$

Dado que, dados h y g polinomios con $mult(\beta, h) = 3$ y $mult(\alpha, g) = 5 \Rightarrow mult(\alpha, f \cdot g) = 8$

pero $mult(\alpha, f+g) = 3$

y en el caso general, la multiplicidad de una raíz en una suma de polinomios es la de menor grado. Solo si tienen $\neq$ mult

pues $h = (x-\alpha)^3 \cdot \beta_1$ con $\beta_1(\alpha) \neq 0$ y $g = (x-\alpha)^5 \cdot \beta_2$ con $\beta_2 \neq 0$

y por lo tanto $h+g = (x-\alpha)^3 \cdot \beta_1 + (x-\alpha)^5 \cdot \beta_2 = (x-\alpha)^3 (\beta_1 + (x-\alpha)^2 \beta_2)$

donde $(x-\alpha) \nmid \beta_1 + (x-\alpha)^2 \beta_2$ ◻

Pruebo por inducción que $\cancel{n^2 \geq 2n+3, \forall n \geq 2}$ $5.n > 2n+3, \forall n \geq 2$

Caso base $n=2 \Rightarrow \cancel{2^2 \geq 2.2+3}$

$5.2 > 2.2+3 \Leftrightarrow 10 > 7$

Luego $p(2)$ es verdadero

Paso inductivo

Dado $h \geq 2$, $p(h)\ V \Rightarrow p(h+1)\ V$

HI $p(h)\ V \Leftrightarrow 5.h > 2.h+3$

Qpq $p(h+1)\ V \Leftrightarrow 5.(h+1) > 2(h+1)+3$

$\Leftrightarrow 5h+5 > 2h+5$

$\Leftrightarrow 5h > 2h$ que es verdadero, $\forall h \geq 2$

Luego $5n > 2n+3$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (No hacía falta usar inducción para probar esto) pues $5n > 2n+3$

$\Leftrightarrow 5n - 2n > 3$

$3n > 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Luego resta probar que $mult(\alpha, f_n) = 2n+3$

Por inducción: $p(n) =:$ " $mult(\alpha, f_n) = 2n+3$ ", $\forall n \in \mathbb{N}$

Caso base $n=1 \Rightarrow p(1)$: $mult(\alpha, f_1) = 5$ es verdadero

Paso inductivo: Dado $h \geq 1$, $p(h)\ V \Rightarrow p(h+1)\ V$?

HI: $p(h)\ V \Leftrightarrow mult(\alpha, f_h) = 2h+3 \Rightarrow f_h = (x-\alpha)^{2h+3} \cdot q_2$ con $q_2(\alpha) \neq 0$

Qpq: $p(h+1)\ V \Leftrightarrow mult(\alpha, f_{h+1}) = 2(h+1)+3$

$$f_{h+1} = (x-\alpha)^2 f_h + f^{h+1} = (x-\alpha)^2 \cdot f_h + [(x-\alpha)^5 \cdot q]^{h+1}$$

$$= (x-\alpha)^2 \cdot f_h + (x-\alpha)^{5(h+1)} \cdot q_1^{h+1}$$

$$\underset{HI}{=} (x-\alpha)^2 \cdot (x-\alpha)^{2h+3} \cdot q_2 + (x-\alpha)^{5(h+1)} q_1$$

$$h \geq 2 = (x-\alpha)^{2h+5} \left(q_2 + (x-\alpha)^{5h+5-2h-5} q_1\right)$$

Hope

NOW William Hope

7

$P_{n+1} = (x-\alpha)^{2n+5}\left(q_2 + (x-\alpha)^{3n} \cdot q_1\right)$

luego, $mult(\alpha, P_{n+1}) = 2n+5$ pues $q_2(\alpha) \neq 0$ como se quería probar

Por lo tanto $p(n)$ V $\Rightarrow$ $p(n+1)$ V, $\forall n \geq 1$

luego $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$

y así $mult(\alpha, P_n) = 2n+3$, $\forall n \in \mathbb{N}$

B⁻